

[dx.doi.org/10.17488/RMIB.40.3.5](https://doi.org/10.17488/RMIB.40.3.5)

E-LOCATION ID: e201854

Identificación Estable de Fuentes Asociadas a Focos Epilépticos Ubicadas sobre la Corteza

Stable Identification of Sources Associated with Epileptic Focus on the Cerebral Cortex

M. M. Morín-Castillo, C. Netzahualcoyotl-Bautista, J. J. Conde-Mones, J. J. Oliveros-Oliveros, A. Santillán-Guzmán

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

RESUMEN

Objetivo: Presentar un algoritmo estable que determina, a partir de mediciones electroencefalográficas, los parámetros de fuentes de tipo dipolar asociadas a focos epilépticos ubicados sobre la superficie de la corteza cerebral. **Metodología:** Se utiliza un problema de contorno para establecer correlaciones entre la fuente y la medición. El problema se divide en dos subproblemas lineales y en cada uno de ellos, se utilizan el método de mínimos cuadrados y la regularización de *Tikhonov* para encontrar soluciones estables. Estos subproblemas son problemas mal planteados en el sentido de *Hadamard*, debido a la inestabilidad numérica que presentan, es decir, pequeños cambios en las mediciones pueden producir grandes variaciones en la solución de cada problema. El parámetro de regularización de *Tikhonov* fue elegido usando el método de la curva *L*. Para hallar la solución del problema de contorno se utiliza el método de las series de *Fourier* y el Método del Elemento Finito. **Resultados:** Se propuso un tipo de fuente para representar a los focos epilépticos en la corteza cerebral y un algoritmo estable para el problema de identificación de los parámetros de dichas fuentes. Se desarrollaron ejemplos sintéticos y programas en MATLAB para el caso de geometría simple bidimensional. **Originalidad:** La separación del problema original en dos subproblemas así como los ejemplos sintéticos son producto de esta investigación. **Conclusión general:** Se propuso un algoritmo estable que determina a los parámetros de fuentes de corriente dipolar definidas en la corteza cerebral.

PALABRAS CLAVE: problema inverso; regularización; problema mal planteado; identificación de fuentes, Método del Elemento Finito

ABSTRACT

Objective: To present a stable algorithm that determines, from electroencephalographic measurements, the parameters of dipolar sources associated with epileptic foci located on the cerebral cortex. **Methodology:** A boundary value problem is used to establish correlations between the sources and the measurements. The problem is divided into two linear subproblems and in each one, the method of Minimum Square and the *Tikhonov* regularization are used for finding stables solutions. These subproblems are an ill-posed problem in the *Hadamard* sense, which is due to the numerical instability, that is, small changes in the data can produce substantial variations in the solution of each problem. The *Tikhonov* regularization parameter was chosen using the L curve method. To find the solution of the boundary value problem are used the *Fourier* series method and the Finite Element Method. **Results:** A type of source that represents the epileptic foci on the cerebral cortex and a stable algorithm for finding the parameter of these sources were proposed. Synthetics examples and MATLAB programs were developed for the case of bidimensional geometry. **Originality:** The separation of the original problem into two subproblems and the synthetics examples are a product of this research. **Conclusion:** A stable algorithm was proposed for determining the parameters of the dipolar current defined on the cerebral cortex.

KEYWORDS: inverse problem; regularization; ill-posed problem; source identification; Finite Element Method

Correspondencia

DESTINATARIO: María Monserrat Morín Castillo
INSTITUCIÓN: Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla
DIRECCIÓN: 4 Sur #104, Col. Centro, C. P. 72000, Puebla
de Zaragoza, Puebla, México
CORREO ELECTRÓNICO: maria.morin@correo.buap.mx

Fecha de recepción:

18 de diciembre de 2018

Fecha de aceptación:

10 de junio de 2019

INTRODUCCIÓN

El problema inverso electroencefalográfico (PIE) consiste en determinar, a partir de mediciones electroencefalográficas sobre el cuero cabelludo, las fuentes bioeléctricas que generan dichas mediciones. Las fuentes representan grandes conglomerados de neuronas que trabajan de forma sincronizada para generar potenciales que puedan ser registrados en el cuero cabelludo a través de un electroencefalógrafo ^[1]. El PIE es un problema mal planteado en el sentido de *Hadamard* ^[2], esto es: Un problema es mal planteado si no tiene solución, o tal solución no es única ya que existen diferentes fuentes que pueden producir la misma medición, o presenta una inestabilidad numérica, que se refleja en el hecho de que pequeños cambios en la medición pueden producir grandes variaciones en la localización de la fuente. Para tratar esta inestabilidad se utilizan los llamados métodos de regularización ^[2], que permiten encontrar soluciones estables aproximadas a partir de la medición con error. Para el estudio del PIE, se requiere considerar el llamado problema directo, el cual consiste en determinar la medición cuando se conoce la fuente. A diferencia del problema inverso, el problema directo tiene buenas propiedades numéricas, es decir, si dos fuentes están cercanas, las respectivas mediciones también lo estarán. Esto se demuestra abajo cuando se llegue al planteamiento operacional del problema.

Las fuentes bioeléctricas pueden dividirse en corticales y subcorticales y su estudio puede hacerse por separado sin pérdida de generalidad. En este trabajo, sólo se considera el caso en el que la fuente se localiza sobre la corteza cerebral. En este caso, el problema de identificación de la fuente tiene solución única ^[3], por lo que el mal planteamiento del PIE está asociado con la inestabilidad numérica. Para manejar esta inestabilidad, se utiliza el método de regularización de *Tikhonov* ^[2], eligiendo el parámetro de regularización por medio del método de la curva L ^[4]. En este trabajo, se propone un algoritmo para identificar fuentes de corriente dipolar

que modelan focos epilépticos. Las fuentes de corriente dipolar se definen por medio de la función delta de *Dirac* y el momento dipolar ^[5]. Para aproximar a la función delta de *Dirac*, se utilizan funciones campana. En el primer paso, el algoritmo identifica al centro de la función campana, con lo que se halla el centro de la función delta de *Dirac*. En el segundo paso, se determina el momento dipolar, con lo que se determinan los parámetros de la fuente de corriente dipolar. En ambos casos se utiliza el funcional de *Tikhonov* y se encontró que puede considerarse el mismo parámetro de regularización. El algoritmo propuesto es implementado en una geometría formada por dos círculos concéntricos, procediendo por dos caminos: 1) usando series de *Fourier* (armónicos circulares); 2) usando el método del elemento finito (MEF) y el Método de Gradiente Conjugado (MGC) ^[6]. En ambos casos se obtienen tanto el centro como el momento dipolar de la fuente y con ello se mostró que el algoritmo propuesto muestra buenos resultados. Los resultados son ilustrados a través de ejemplos sintéticos que muestran la factibilidad del algoritmo propuesto para determinar los parámetros de la fuente de corriente dipolar. Los dos métodos pueden extenderse al caso tridimensional y con ello, el algoritmo propuesto. Además, que el segundo camino puede utilizarse para geometrías irregulares.

Cabe destacar que el problema de identificar los parámetros de la fuente dipolar es no lineal y que se propone un algoritmo que encuentra dichos parámetros a través de dos problemas inversos lineales que utilizan el método de regularización de *Tikhonov*, y el parámetro de regularización se obtiene mediante el método de la curva L . Los resultados numéricos mostraron que puede elegirse el mismo parámetro de regularización para ambos problemas. Además, el primer paso del algoritmo, puede aplicarse para fuentes más generales que las funciones campana, lo que podría permitir considerar otro tipo de actividad diferente a la epiléptica o aproximar a las fuentes de corriente dipolar por medio de otra clase de funciones.

Problema de contorno electroencefalográfico cortical

Se considera a la cabeza $\bar{\Omega}_1 \cup \Omega_2$ como un medio conductor compuesto por dos medios homogéneos donde Ω_1 representa al cerebro, Ω_2 al resto de las capas que componen la cabeza (líquido intracraneal, cráneo, cuero cabelludo), σ_1 y σ_2 son las conductividades de Ω_1 y Ω_2 las cuales se suponen constantes, S_1 representa la superficie de la corteza cerebral, S_2 a la superficie del cuero cabelludo y $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup S_1$ (ver Figura 1).

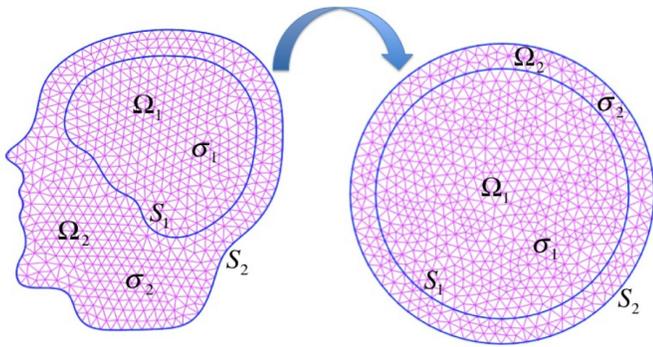


FIGURA 1. Representación esquemática de la cabeza.

El estudio del problema de identificación de fuentes se realiza a través del siguiente problema de contorno [3]:

$$-\sigma_1 \Delta u_1 = 0, \text{ en } \Omega_1, \quad (1)$$

$$-\sigma_2 \Delta u_2 = 0, \text{ en } \Omega_2, \quad (2)$$

$$u_1 = u_2, \text{ en } S_1, \quad (3)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} + g, \text{ sobre } S_1, \quad (4)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0, \text{ sobre } S_2, \quad (5)$$

donde g es la fuente que representa a un foco epiléptico, $u_i = u|_{\Omega_i}$, $i = 1, 2$ y u representa el potencial eléctrico en Ω , el símbolo Δ representa el operador Laplaciano. La condición de frontera (3) corresponde a la continuidad

del potencial u y la condición de frontera (4) está asociada con el salto en los flujos de corriente debido a la presencia de la fuente g . La condición de frontera (5), se obtiene al considerar que la conductividad de Ω^c es cero (la conductividad del aire). De las fórmulas de Green se deduce la siguiente condición de compatibilidad:

$$\int_{S_1} g(x) dx = 0. \quad (6)$$

Llamaremos al problema (1)-(5), Problema de Contorno Electroencefalográfico Cortical (PCEC). Asociados al PCEC se tienen las siguientes definiciones.

Definición 1: Dada g definida sobre S_1 , el problema directo consiste en hallar la medición $V = u|_{S_2}$, donde u es la solución del PCEC.

Definición 2: Dada una función V definida sobre S_2 , el problema inverso consiste en determinar una fuente g definida sobre S_1 , tal que la solución u del problema directo correspondiente a g , satisfaga que $u|_{S_2} = V$.

Solución del PCEC

Solución débil: Planteamiento operacional

Para el análisis de la solubilidad del PCEC se consideran los siguientes espacios funcionales:

$$F = \left\{ g \in L_2(S_1) : \int_{S_1} g(x) dx = 0 \right\},$$

$$U = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} u(x) dx = 0 \right\},$$

$$V = \left\{ V \in L_2(S_2) : \int_{S_2} V(x) dx = 0 \right\}.$$

Definición 3: Dada $g \in F$, a la función $u \in U$ se le llama solución débil del PCEC si para cada $v \in H^1(\Omega)$:

$$\sigma_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v d\Omega + \sigma_2 \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \nabla v d\Omega = \int_{S_1} g v ds. \quad (7)$$

El Teorema siguiente garantiza la existencia de solución débil del PCEC y permite realizar el planteamiento operacional del mismo.

Teorema 1: La condición (6) es necesaria y suficiente para la existencia de la solución débil del PCEC. Hay una única solución débil $u \in \mathbf{U}$ y $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|g\|_{L_2(S_T)}$, donde la constante C no depende de g .

Se define el operador $T: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{U}$ mediante $T(g) = u$ donde u es la única solución débil del PCEC. El operador $A: \mathbf{F} \rightarrow L_2(S_2)$ se define a través de la composición del operador T con el operador traza $Tr: \mathbf{U} \rightarrow L_2(S_2)$ [2]. Por la continuidad de T (que se deduce de la desigualdad del Teorema 1) y la compacidad del operador Tr , se tiene que A es un operador compacto. De esto se deduce que dos fuentes cercanas producen mediciones cercanas. Además, el operador A es inyectivo, lo cual se deduce de la unicidad de solución del PCEC sobre los espacios funcionales. Por medio de este operador se estudiará al problema de identificación de fuentes planteado en este trabajo. De las condiciones anteriores se deduce que el operador inverso de A no es continuo, lo que lleva a una inestabilidad numérica, que es causa del mal planteamiento de este problema. Para tratar dicha inestabilidad numérica, se emplea el método de regularización de *Tikhonov*. El MEF [6] se utiliza para encontrar una solución numérica del PCEC.

Solución clásica

Definición 4: $u \in C(\Omega) \cap C^2(\Omega_1) \cap C^2(\Omega_2) \cap C^1(\bar{\Omega}_1) \cap C^1(\bar{\Omega}_2)$, es una solución clásica del problema del PCEC, si se satisfacen las relaciones en el sentido usual de diferenciación.

El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad (salvo constantes) de la solución clásica del PCEC. La demostración utiliza las técnicas de la teoría de potencial, sistemas duales y los teoremas de alternativa de *Fredholm* [3].

Teorema 2: Dada $g \in C(S_1)$, la condición de compatibilidad (6), es necesaria y suficiente para la existencia y unicidad (salvo constantes) de la solución clásica del PCEC.

Para el caso de fuentes de tipo campana, con las que se aproximan a las fuentes dipolares, la solución clásica y la débil coinciden. Esto se debe a que dichas fuentes son infinitamente diferenciables con lo que satisfacen las hipótesis del **Teorema 2** y a que la solución clásica satisface la relación (7). Por otra parte, para fuentes campana la solución débil pertenece al espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$ [3] con lo que satisface el problema de contorno en sentido clásico.

Solución del problema directo e inverso

Para hallar la solución del PCEC pueden emplearse diferentes métodos tanto analíticos como numéricos. Por ejemplo, el método de la matriz de tipo *Green* que generaliza al método de la función de *Green*, el método de las series de *Fourier*, el MEF, el método de diferencias finitas, entre otros. Se considera el MEF, el método de las series de *Fourier* y el caso bidimensional en una geometría simple para mostrar la factibilidad del algoritmo propuesto. Todos los resultados pueden extenderse al caso tridimensional. Claramente el problema directo tiene una solución única ya que el PCEC tiene solución única salvo constantes y en los espacios funcionales en los que se busca la solución, definidos anteriormente, se obvian las constantes. Para el problema inverso se tiene el siguiente resultado [3]:

Teorema 3: Dada una medición V definida sobre S_2 , si existe una fuente $g \in \mathbf{F}$ que es solución del problema inverso, entonces es única.

En la Sección siguiente, se busca la solución de los problemas directo e inverso por medio de series de *Fourier* y del MEF. Estos métodos se usan para tener dos formas de validar el algoritmo propuesto, uno analítico y otro numérico.

Series de Fourier

Se considera que la región Ω está compuesta por dos círculos concéntricos centrados en el origen de radios R_1 y R_2 , es decir, Ω_1 el círculo de radio R_1 , representa al cerebro y el resto de las capas que componen la cabeza Ω_2 está representado por la región anular circular que se forma al hacer la diferencia del círculo de radio R_2 con el de radio R_1 . La solución del PCEC se buscará usando el método de las series de *Fourier*. En particular, se usan los armónicos circulares los cuales forman una base para el espacio de las funciones armónicas. Para hallar la solución se supone que la fuente g puede desarrollarse en la forma:

$$g(\theta) = \sum_{k=1}^n g_k^1 \cos k\theta + g_k^2 \sin k\theta,$$

donde los coeficientes g_k^1 y g_k^2 son los coeficientes de *Fourier* de g . Nótese que esta fuente satisface la condición de compatibilidad (6). Como se comentó anteriormente, los armónicos circulares forman una base para las funciones armónicas, por lo que la solución u del PCEC se busca como:

$$u_1(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^1 r^k \cos k\theta + b_k^1 r^{-k} \sin k\theta,$$

$$u_2(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 r^k + b_k^2 r^{-k}) \cos k\theta + (c_k^2 r^k + d_k^2 r^{-k}) \sin k\theta.$$

Para determinar los coeficientes de *Fourier* de u se utilizan las condiciones de contorno del PCEC. Después de laboriosos cálculos se halla que la solución del problema directo está dada por:

$$V(\theta) = A(g)(\theta) = u(R_2, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k^1 \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k^2 \sin k\theta, \quad (8)$$

donde

$$a_k = \frac{2R_1^{k+1}R_2^k}{k[(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}]} \quad (9)$$

Nótese que V representa a la medición sobre la frontera S_2 , es decir, $V = A(g)$ representa en este modelo al EEG sobre el cuero cabelludo en un instante de tiempo fijo.

Para el problema inverso se considera que $V(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k^1 \cos k\theta + V_k^2 \sin k\theta$ es conocida, donde V_k^1 y V_k^2 son los coeficientes de *Fourier* de V . En la práctica, los coeficientes de *Fourier* de V están dados con error y debido a que el problema inverso presenta inestabilidad numérica, se debe considerar el funcional de *Tikhonov*:

$$J_{\alpha(\delta)}(g) = \|A(g) - V\|_{L_2(S_2)}^2 + \alpha(\delta) \|g\|_{L_2(S_1)}^2, \quad (10)$$

donde $\alpha(\delta) > 0$ es el parámetro de regularización y $\|\cdot\|_{L_2(S_i)}$ denota la norma del espacio $L_2(S_i)$, $i = 1, 2$. Minimizar el funcional $J_{\alpha(\delta)}$ es equivalente a resolver las ecuaciones normales: $A^*Ag + \alpha(\delta)Ig = A^*V$ donde A^* es el operador adjunto de A , el cual está dado por:

$$A^*(h) = \frac{R_2}{R_1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k h_k^1 \cos k\theta + a_k h_k^2 \sin k\theta,$$

con

$$h(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k^1 \cos k\theta + h_k^2 \sin k\theta.$$

Se considera ahora que en vez de V , se tiene la medición con error $V_{\delta} = \sum_{k=1}^{\infty} V_{k,\delta}^1 \cos k\theta + V_{k,\delta}^2 \sin k\theta$ con $\|V - V_{\delta}\|_{L_2(S_2)} \leq \delta$. Después de sustituir en las ecuaciones normales se halla la solución regularizada:

$$g_{\alpha(\delta)}(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_2 a_k}{R_2(a_k)^2 + \alpha(\delta)R_1} [V_{k,\delta}^1 \cos k\theta + V_{k,\delta}^2 \sin k\theta]. \quad (11)$$

Enseguida, se procede a buscar la solución de los problemas directo e inverso con el Método de Elemento Finito (MEF) y el Método de Gradiente Conjugado (MGC).

MÉTODO DE ELEMENTO FINITO Y MÉTODO DE GRADIENTE CONJUGADO

El MEF puede emplearse para resolver el PCEC tanto en geometría simple como irregular. En ambos casos se considera la expresión para la solución débil (7). A fin de ilustrar el algoritmo propuesto, sólo se desarrolla el caso de geometría simple, a saber, el caso en que la región Ω se representa por medio de círculos concéntricos. Para aproximar el espacio \mathbf{U} , se considera una triangulación de elemento finito τ_h de Ω donde h es la longitud de más largo de ejes de τ_h , es decir, la región $\bar{\Omega}$ se aproxima por una región poliédrica $\bar{\Omega}_h = \cup_{T \in \tau_h} T$ (ver Figura 1). El espacio $L_2(\Omega)$ se aproxima por el espacio discreto $L_2(\Omega)_h = \{v_h \in C(\Omega_h) : v_h|_T \in \mathbb{P}_1, \forall T \in \tau_h\}$ donde $C(\Omega_h)$ denota el espacio de las funciones continuas definidas sobre Ω_h ; \mathbb{P}_1 es el conjunto de los polinomios de grado uno sobre Ω_h . Así, las integrales que definen a la solución débil (7) se convierten en integrales sobre la región poliédrica. El cálculo de las integrales puede realizarse por medio de diferentes métodos de integración. Se utiliza la regla del trapecio. El sistema de ecuaciones lineales algebraicas que se obtiene al aplicar el MEF, puede ser resuelto por el método de Cholesky [7], [8].

Para hallar la solución del problema inverso, se debe minimizar el funcional de *Tikhonov*. Esto se realiza por medio del Método del Gradiente Conjugado (MGC) [8, 9, 10]. Para aplicar el MGC se utiliza el siguiente problema de valores en la frontera:

$$\begin{aligned} -\sigma_1 \Delta w_1 &= 0, \text{ en } \Omega_1, \\ -\sigma_2 \Delta w_2 &= 0, \text{ en } \Omega_2, \\ w_1 &= w_2, \text{ en } S_1, \\ \sigma_1 \frac{\partial w_1}{\partial n_1} &= \sigma_2 \frac{\partial w_2}{\partial n_1}, \text{ sobre } S_1, \\ \sigma_2 \frac{\partial w_2}{\partial n_2} &= v, \text{ sobre } S_2, \end{aligned}$$

El cual es conocido como problema de contorno electroencefalográfico cortical adjunto, denotado como PCECA. Con este problema se define el operador adjunto $A^*: L_2(S_2) \rightarrow L_2(S_1)$ con regla de correspondencia $A^*(v) = w|_{S_1}$. Ya que el MGC es un método iterativo, en cada paso de la iteración se deben resolver tanto el PCEC como el PCECA [3].

Se propone una expresión para una fuente de corriente dipolar concentrada en la corteza cerebral, explicada en la siguiente Sección.

Fuentes dipolares corticales

La corriente total J en el cerebro consiste de la suma de dos corrientes $J = J^p + \sigma_i E$, donde J^p es la corriente primaria o impresa y es debida a la actividad biológica de las neuronas; $\sigma_i E$, $i = 1, 2$, se llama corriente óhmica y es debida a la corriente eléctrica en el medio, donde σ_i representa la conductividad en cada región. La corriente J^p puede estar concentrada tanto en la corteza como en el volumen cerebral. En las regiones restantes que compone la cabeza sólo puede haber corrientes óhmicas.

Se considera que la fuente corresponde a un foco epiléptico ubicado sobre la corteza cerebral. La representación matemática de este tipo de fuente, se hará siguiendo la idea del caso en el que la fuente es subcortical, en el cual los dipolos de corriente se representan a través de la función delta de Dirac que es una función generalizada o distribución [1, 11, 12]. Más precisamente, se considera que un foco epiléptico concentrado en el punto $a \in S_1$ puede representarse en la forma: $j^p(x) = \vec{P} \delta(x - a)$, es decir, se toma a como el punto donde está concentrada la función delta de *Dirac* y \vec{P} es un vector que representa al llamado momento dipolar. En [13], se propone un algoritmo para identificar a la fuente de corriente dipolar usando una simplificación. Tomando en cuenta que la función delta de *Dirac* es el límite en sentido de distribuciones o funciones generalizadas de funciones campana [14], se considera la siguiente aproximación:

$$j_{\beta}^p(x) = \vec{P}e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}$$

donde β es el ancho de la campana. Ahora, tomando en consideración que para los flujos de corriente en la frontera se considera la componente normal de las corrientes involucradas (óhmicas y primarias) se llega a que las fuentes corticales con la que se representan a los focos epilépticos tienen la forma:

$$g_{\beta}(x) = j_{\beta}^p(x) \cdot n_1 - \frac{1}{m(S_1)}, \quad (12)$$

donde n_1 representa la normal exterior sobre S_1 y el término

$$\frac{1}{m(S_1)}$$

se incluye para que se satisfaga la condición de compatibilidad [6] y representar la medida de S_1 (longitud en el caso bidimensional y área en el caso tridimensional).

El algoritmo propuesto se deduce en la siguiente Sección.

Algoritmo de identificación de los parámetros de la fuente

Como se ha mencionado anteriormente, el interés radica en el problema de identificación de fuentes dipolares que representan a focos epilépticos. Por la forma en que éstas se definen, se deben identificar los parámetros de las mismas, a saber, el centro de la función delta de *Dirac* y el momento dipolar. En [3], se presentó un algoritmo para identificar a las fuentes $g \in \mathbf{F}$ que se ilustró en geometría simple e irregular. Este algoritmo permite identificar de forma estable no sólo a funciones de tipo dipolar sino a todas las del espacio \mathbf{F} . Para el caso en que las fuentes son de tipo dipolar y se aproximan por medio de (12), dicho algoritmo permite determinar tanto a la función g como el centro a de la función campana que define a g (con ello al centro de la

función delta de *Dirac*). Una vez que se conoce el centro a , se determina el momento dipolar \vec{P} . Para dar solución a este problema, se considera de nueva cuenta al funcional de *Tikhonov*, evaluado en la solución encontrada en el primer paso. El parámetro de regularización se elige por medio del método de la curva L .

Se va a considerar el caso de círculos concéntricos. Cuando la solución se busca por medio de series de *Fourier*, una vez que se encontró el centro de la función campana [3], se utiliza (12) para definir

$$h_k^{1,1} = R_1 \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \cos \theta \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{M_{\beta}} \cos k\theta \, d\theta,$$

$$h_k^{1,2} = R_1 \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \sin \theta \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{M_{\beta}} \cos k\theta \, d\theta,$$

$$h_k^{2,1} = R_1 \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \cos \theta \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{M_{\beta}} \sin k\theta \, d\theta,$$

$$h_k^{2,2} = R_1 \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \sin \theta \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}}}{M_{\beta}} \sin k\theta \, d\theta,$$

donde

$$M_{\beta} = \int_{S_1} e^{-\frac{|x-a|^2}{2\beta^2}} dx$$

y notando que en este caso $n_1(\theta) = (R_1 \cos(\theta), R_1 \sin(\theta))$, con los cuales se halla que $g_k^1 = p_1 h_k^{1,1} + p_2 h_k^{1,2}$ y $g_k^2 = p_1 h_k^{2,1} + p_2 h_k^{2,2}$ para $k=1, 2, \dots, N$. Se sustituyen los coeficientes g_k^1 y g_k^2 en el funcional de *Tikhonov* de donde se obtiene el sistema

$$(B^t B + \alpha_1(\delta) C^t C) \vec{P}_{\alpha_1(\delta)} = B^t \vec{V}$$

donde

$$B^t = \begin{pmatrix} a_1 h_1^{1,1} & \dots & a_N h_N^{1,1} & a_1 h_1^{2,1} & \dots & a_N h_N^{2,1} \\ a_1 h_1^{1,2} & \dots & a_N h_N^{1,2} & a_1 h_1^{2,2} & \dots & a_N h_N^{2,2} \end{pmatrix},$$

$$C^t = \begin{pmatrix} h_1^{1,1} & h_2^{1,1} & \dots & h_N^{1,1} & h_1^{2,1} & h_2^{2,1} & \dots & h_N^{2,1} \\ h_1^{1,2} & h_2^{1,2} & \dots & h_N^{1,2} & h_1^{2,2} & h_2^{2,2} & \dots & h_N^{2,2} \end{pmatrix},$$

$$\vec{V}^t = (V_{1,\delta}^1 \ V_{2,\delta}^1 \ \dots \ V_{N,\delta}^1 \ V_{1,\delta}^2 \ V_{2,\delta}^2 \ \dots \ V_{N,\delta}^2),$$

con a_k está dada por (9), para $k= 1, 2, \dots, N$.

Así, la solución del problema está dada por

$$\vec{P}_{\alpha_1(\delta)} = (B^t B + \alpha_1(\delta) C^t C)' B^t \vec{V}. \quad (13)$$

Cuando se utilizan el MEF y el MGC, una vez que se determina el centro de la función campana [3], se determina el momento dipolar a través de:

$$J_{\alpha(\delta),a}(\vec{P}) = \|M\vec{P} - V_\delta\|_{L_2(S_2)}^2 + \alpha_1(\delta) \|\vec{P}\|_{L_2(S_1)}^2, \quad (14)$$

con $M = (m_1, m_2)$ con $m_1 = (\tilde{u}(q_1), \dots, \tilde{u}(q_m))^2$ y $m_2 = (\tilde{u}(q_1), \dots, \tilde{u}(q_m))^2$, donde m es el número de nodos sobre S_2 , q_1, \dots, q_m son los nodos que están sobre la frontera S_2 y (\tilde{u}, \tilde{u}) son las soluciones numéricas (usando el MEF) del problema directo para las fuentes g con el mismo centro a y con un diferente momento dipolar $\vec{P} = (1,0)$ y $\vec{P} = (0,1)$ (los cuales son una base para generar el espacio de momentos dipolares), respectivamente. Además, minimizar el funcional (16) es equivalente a resolver las ecuaciones normales:

$$(M^t M + \alpha_1(\delta) I) \vec{P}_{\alpha_1(\delta)} = M^t V_\delta \quad (15)$$

donde M^t denota la matriz transpuesta de M . Esta última metodología para determinar los parámetros del dipolo se puede aplicar también al caso de geometría irregular. Este caso no se aborda en este trabajo.

RESULTADOS NUMÉRICOS Y DISCUSIÓN

En esta Sección, se presentan ejemplos numéricos para ilustrar el algoritmo propuesto. Se considera que la región Ω está determinada por dos círculos concéntricos centrados en el origen, es decir, Ω_1 es un domi-

nio circular de radio R_1 y Ω_2 es un dominio anular con radio interior R_1 y radio exterior R_2 , como se muestra en la Figura 1. Por simplicidad se consideran los siguiente valores $\sigma_1 = 3$ y $\sigma_2 = 1$. Los ejemplos sintéticos son generados tomando una fuente superficial g_β definida por (12); posteriormente se resuelve el problema directo, es decir, se calcula $V = u|_{S_2}$, donde u es la solución del PCEC. Entonces el potencial V es dado como dato de entrada para minimizar el funcional de *Tikhonov* (10) y determinar los parámetros de la fuente dipolar siguiendo los pasos del método descrito previamente:

Primer paso: Determinar de manera estable el centro $a_{\alpha(\delta)}$ de la función campana que define a $g_{\alpha(\delta),N}$ (y con ello al centro aproximado de la función delta de *Dirac*) recuperada usando los métodos desarrollados en [3].

Segundo paso: Determinar el momento dipolar a partir de $\vec{P}_{\alpha_1(\delta)}$ a $a_{\alpha(\delta)}$, $a_1(\delta)$ y de (13) o (15), los cuales usan el desarrollo en series de *Fourier* tomando como base los armónicos circulares así como el MEF, respectivamente.

Para determinar los parámetros de regularización $a(\delta)$ y $a_1(\delta)$ se utiliza el método de la curva L , donde δ es el error que se comete cuando se mide V , es decir, en vez de V se conoce V_δ con $\|V_\delta - V\|_{L_2(S_2)} \leq \delta$. Los datos con error V_δ son obtenidos agregando un error aleatorio usando la función *rand* de MATLAB, definiendo

$$V_\delta = V + Error, \quad (16)$$

donde $Error = \delta \max|V|(2rand(1,s)-1)$ es un vector de números aleatorios de longitud s (s es un número de nodos de la frontera exterior S_2). Para el caso de coeficiente de *Fourier* se agrega un error aleatorio a los coeficientes exactos usando también a la función *rand*.

En los ejemplos siguientes se consideran los errores absolutos $EA(.,.)$ y relativos $ER(.,.)$ en las normas de los espacios correspondientes.

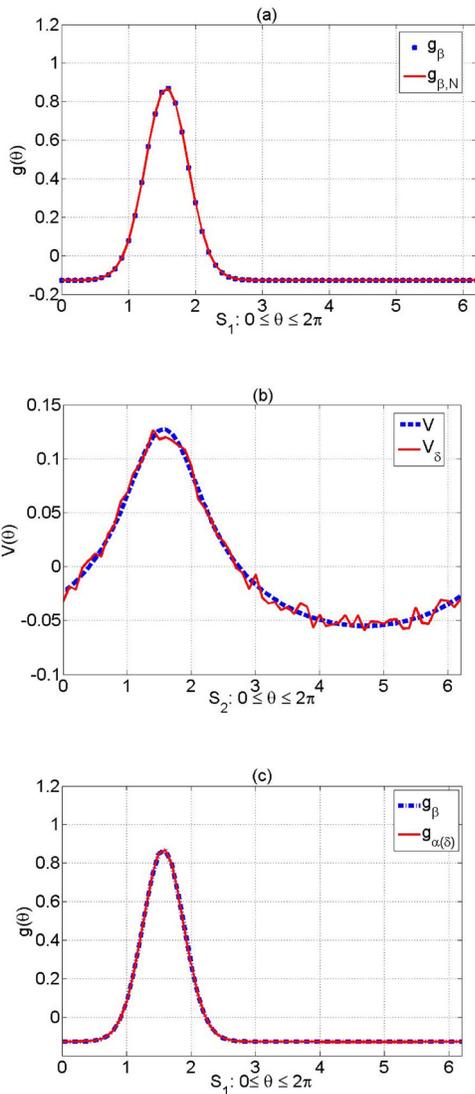


FIGURA 2. (a) Fuente exacta g_β (línea punteada) y su aproximación por su serie de *Fourier* truncada $g_{\beta,N}$ (línea continua). (b) Medición exacta V (línea punteada) y perturbada V_δ (línea continua). (c) Fuentes exacta g_β (línea punteada) y recuperada $g_{\alpha(\delta)}$ (línea continua).

Ejemplo 1 (Identificación de los parámetros de la fuente usando series en armónicos circulares): Se considera que en la fuente de corriente dipolar $j_p(x) = \vec{P}\delta(x-a)$ se toma $a = (a_1, a_2) = (0,1)$, $P = (p_1, p_2) = (1,1)$. Para calcular la medición producida por la fuente, se utiliza una aproximación de la fuente en la forma (12) y la expresión (8) con $N=30$, $\beta=0.1$, $\sigma_1=3$, $\sigma_2=1$, $R_1=1$, $R_2=1.2$. Los coeficientes g_k^1 y g_k^2 de $g_\beta \in L_2(S_1)$ son obtenidos usando la función *quadl* de MATLAB. En la

Figura 2(a), se muestra dicha fuente g_β (línea punteada) y su aproximación $g_{\beta,N}$ (línea continua) con series cuyo error absoluto es de 0.0103 (para $N=30$). Los datos perturbados V_δ son generados como en (16) agregando un error aleatorio a los coeficientes de *Fourier* de V , es decir,

$$V_{\delta,k}^i = V_k^i + Error_k^i$$

donde

$$Error_k^i = \frac{\delta \max|V|(1 - 2rand(1,k))}{\sqrt{k}}$$

para $i=1, 2$ y para $k=1, 2, \dots, N$. Después de aplicar el algoritmo para identificar una fuente aproximada $g_{\alpha(\delta),N}$ por el método propuesto en [3], con $\alpha(\delta) = 10^{-4}$ se obtiene el centro aproximado $a_{\alpha(\delta)}$ de la función campana $g_{\alpha(\delta),N}$. En coordenadas polares el centro exacto de la fuente exacta g_β está dado para $\theta_0 = \pi/2$, es decir,

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0,1)$$

Para determinar el momento dipolar \vec{P}_{α_1} se aplica (13). En la Tabla 1 se muestran los resultados obtenidos del centro y momento dipolar para diferentes valores de δ . Además, se expresan los errores absoluto y relativo entre el centro exacto y aproximado y entre el momento dipolar exacto y el momento dipolar aproximado. Se observa que el mayor error relativo ocurre en la solución aproximada de $\vec{P}_{\alpha_1(\delta)}$, que es del mismo orden que la perturbación *ER* (V_δ, V) de los datos de entrada V_δ para $\delta=0.1, 0.01$. Los resultados numéricos muestran que las soluciones numéricas $a_{\alpha(\delta)}$ y $\vec{P}_{\alpha_1(\delta)}$ convergen a las soluciones exactas cuando δ tiende a cero. En este caso, la fuente dipolar superficial recuperada correspondiente a los parámetros $a_{\alpha(\delta)}$ y $\vec{P}_{\alpha_1(\delta)}$ es denotada por $g_{\alpha(\delta)}$. En la Figura 2 (c), se muestra la fuente g_β y la fuente recuperada $g_{\alpha(\delta)}$ determinada a partir de los datos perturbados mostrados en la Figura 2(b) para $\delta=0.1$.

TABLA 1. Resultados numéricos considerando el centro $a = (0,1)$ y momento dipolar $\vec{P} = (1,1)$, para diferentes valores de δ .

| δ | 0 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $EA(V_\delta, V)$ | 0 | 1.1212×10^{-4} | 1.1594×10^{-3} | 1.1637×10^{-2} |
| $ER(V_\delta, V)$ | 0 | 5.6663×10^{-4} | 5.8590×10^{-3} | 5.8809×10^{-2} |
| $\alpha(\delta)$ | 10^{-6} | 10^{-6} | 10^{-5} | 10^{-4} |
| $a_{\alpha(\delta)}$ | (-0.029, 0.999) | (-0.029, 0.999) | (-0.029, 0.999) | (-0.029, 0.999) |
| $EA(a, a_{\alpha(\delta)})$ | 2.9202×10^{-2} | 2.9202×10^{-2} | 2.9202×10^{-2} | 2.9202×10^{-2} |
| $ER(a, a_{\alpha(\delta)})$ | 2.9202×10^{-2} | 2.9202×10^{-2} | 2.9202×10^{-2} | 2.9202×10^{-2} |
| $\alpha_1(\delta)$ | 10^{-6} | 10^{-6} | 10^{-5} | 10^{-4} |
| $\vec{P}_{\alpha_1(\delta)}$ | (0.985, 0.999) | (0.984, 0.999) | (0.980, 1.000) | (0.883, 0.987) |
| $EA(\vec{P}, \vec{P}_{\alpha_1(\delta)})$ | 1.4929×10^{-2} | 1.5120×10^{-2} | 1.9765×10^{-2} | 1.1681×10^{-1} |
| $ER(\vec{P}, \vec{P}_{\alpha_1(\delta)})$ | 1.0556×10^{-2} | 1.0692×10^{-2} | 1.3976×10^{-2} | 8.2597×10^{-2} |

En este caso, el valor del parámetro de regularización de $\alpha(\delta)$ y $\alpha_1(\delta)$ es de 10^{-4} . Los errores absolutos correspondientes de las soluciones numéricas son $EA(a, a_{\alpha(\delta)}) = 8.5279 \times 10^{-4}$ y $EA(P, \vec{P}_{\alpha_1(\delta)}) = 0.0068$. Los errores calculados indican que los datos recuperados $a_{\alpha(\delta)}$ y $\vec{P}_{\alpha_1(\delta)}$ por el método propuesto son una buena aproximación a los datos exactos de a y \vec{P} .

En la Tabla 2, se muestran los resultados de la recuperación de los parámetros $a_{\alpha(\delta)}$ y $\vec{P}_{\alpha_1(\delta)}$ para diferentes valores del centro a y del momento dipolar \vec{P} , así como los errores absoluto y relativo entre el centro exacto y aproximado y entre el momento dipolar exacto y aproximado. Nótese que las Tablas 1 y 2, muestran que con $\alpha(\delta) = \alpha_1(\delta)$ se obtienen buenos resultados, es decir, los dos parámetros de regularización pueden ser iguales.

Ejemplo 2 (Identificación de los parámetros de la fuente usando el MGC y el MEF): Se considera la misma región circular del ejemplo anterior con los mismos valores para $\sigma_1, \sigma_2, R_1, R_2$ y para los parámetros a, \vec{P}, β para la fuente dipolar. Como antes, la fun-

ción g_β es aproximada por medio de los primeros $N = 30$ términos de su serie de *Fourier* truncada que se denota por $g_{\beta, N}$. Para calcular la solución del problema directo y generar los datos perturbados, se procede como en Ejemplo 1. Para resolver el PCEC por el MEF se emplea una malla denotada por $M_1(nn, ne)$, donde nn es el número de nodos y elementos (triángulos), respectivamente. El tamaño de malla M_1 es denotado por h . En este ejemplo se toma $h = 0.1$, de donde $nn = 774$ y $ne = 1470$. La malla M_1 fue generada usando el *pdetool* de MATLAB.

TABLA 2. Resultados numéricos considerando diferentes centros y momentos dipolares, para $\delta = 0.1$.

| a | (-1, 0) | $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ | (1, 0) |
|---|-------------------------|--|-------------------------|
| P | (1, 1) | $(\frac{1}{2}, 2)$ | (2, 1) |
| $EA(V_\delta, V)$ | 9.7065×10^{-3} | 1.8806×10^{-2} | 2.0093×10^{-2} |
| $ER(V_\delta, V)$ | 4.9057×10^{-2} | 5.3766×10^{-2} | 5.0776×10^{-2} |
| $\alpha(\delta)$ | 10^{-4} | 10^{-4} | 10^{-4} |
| $a_{\alpha(\delta)}$ | (-0.9824, 0.1862) | (0.6967, 0.7173) | (0.999, 0.029) |
| $EA(a, a_{\alpha(\delta)})$ | 1.8702×10^{-1} | 1.4601×10^{-2} | 2.9017×10^{-2} |
| $ER(a, a_{\alpha(\delta)})$ | 1.8702×10^{-1} | 1.4601×10^{-2} | 2.9017×10^{-2} |
| $\alpha_1(\delta)$ | 10^{-4} | 10^{-4} | 10^{-4} |
| $\vec{P}_{\alpha_1(\delta)}$ | (0.9913, 0.9921) | (0.5764, 1.9505) | (2.0119, 1.0044) |
| $EA(\vec{P}, \vec{P}_{\alpha_1(\delta)})$ | 1.1751×10^{-2} | 9.1058×10^{-2} | 1.2751×10^{-2} |
| $ER(\vec{P}, \vec{P}_{\alpha_1(\delta)})$ | 8.3096×10^{-3} | 4.4169×10^{-2} | 5.7024×10^{-3} |

La Tabla 3 muestra los resultados numéricos para el caso de datos perturbados V_δ , para diferentes valores de δ , donde $\alpha(\delta)$ es el parámetro de regularización, ϵ es el criterio de paro (o tolerancia) del MGC, n es el número de iteraciones del MGC para determinar la fuente superficial aproximada $g_{\alpha(\delta), h}^n$ y $a_{\alpha(\delta)}$ es el centro aproximado a partir de $g_{\alpha(\delta), h}^n$. Por último, $\alpha_1(\delta)$ es el parámetro de regularización que se utiliza para determinar, a partir de los datos V_δ y por medio de (15), el

TABLA 3. Resultados numéricos considerando el centro $\vec{a} = (0,1)$ y momento dipolar $\vec{P} = (1,1)$, con $\beta = 0.1$, y para diferentes valores de δ , usando la malla $M_1 (774,1470)$ cuyo tamaño de malla es $h = 0.1$.

| δ | 0 | 0.001 | 0.01 | 0.1 |
|---|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $EA(V_\delta, V)$ | 0 | 1.0970×10^{-4} | 1.0481×10^{-3} | 1.0935×10^{-2} |
| $ER(V_\delta, V)$ | 0 | 1.5994×10^{-3} | 1.5281×10^{-2} | 1.5942×10^{-1} |
| $\alpha(\delta)$ | 10^{-6} | 10^{-6} | 10^{-5} | 10^{-4} |
| ε | 10^{-3} | 10^{-3} | 10^{-3} | 10^{-3} |
| n | 5 | 5 | 5 | 6 |
| $a_{\alpha(\delta)}$ | (0.0006, 1) | (0.0006, 1) | (0.0006, 1) | (0.0006, 1) |
| $EA(a, a_{\alpha(\delta)})$ | 6.3075×10^{-4} | 6.3075×10^{-4} | 6.3075×10^{-4} | 6.3075×10^{-4} |
| $ER(a, a_{\alpha(\delta)})$ | 6.3075×10^{-4} | 6.3075×10^{-4} | 6.3075×10^{-4} | 6.3075×10^{-4} |
| $\alpha_1(\delta)$ | 10^{-6} | 10^{-6} | 10^{-5} | 10^{-4} |
| $\vec{P}_{\alpha_1(\delta)}$ | (0.978, 1.002) | (0.971, 1.002) | (0.937, 1.004) | (0.886, 1.046) |
| $EA(\vec{P}, \vec{P}_{\alpha_1(\delta)})$ | 2.2034×10^{-2} | 2.9282×10^{-2} | 6.2523×10^{-2} | 1.2239×10^{-1} |
| $ER(\vec{P}, \vec{P}_{\alpha_1(\delta)})$ | 1.5581×10^{-2} | 2.0706×10^{-2} | 4.4211×10^{-2} | 8.6545×10^{-2} |

momento dipolar aproximado $\vec{P}_{\alpha_1(\delta)}$. Asimismo, se muestran los errores absoluto y relativo entre el centro exacto y aproximado y entre el momento dipolar exacto y aproximado. Se puede observar que el comportamiento cualitativo es muy similar al obtenido en el Ejemplo 1. Numéricamente, el mayor error relativo de la solución aproximada ocurre en $\vec{P}_{\alpha_1(\delta)}$, el cual es del mismo orden que la perturbación $ER(V, V_\delta)$ de los datos de entrada V_δ , para $\delta = 0.1, 0.01$. Además, las soluciones numéricas $a_{\alpha(\delta)}$ y $\vec{P}_{\alpha_1(\delta)}$ convergen a soluciones exactas cuando δ tiende a cero.

La fuente dipolar superficial recuperada corresponde a $a_{\alpha(\delta)}$ y $\vec{P}_{\alpha_1(\delta)}$ es denotada por $g_{\alpha(\delta), h}$. En la Figura 3 (b) se muestra la fuente exacta g_β y a fuente recuperada $g_{\alpha(\delta), h}$ determinada a partir de los datos perturbados, mostrados en la Figura 3 (a) para $\delta = 0.1$ en la malla $M_1 (774,1470)$ cuyo tamaño de malla es $h = 0.1$. En este caso, los valores del parámetro de regulariza-

ción $\alpha(\delta) = 10^{-4}$ y $n = 6$ eligiendo un criterio de paro (tolerancia) del MGC $\varepsilon = 10^{-3}$ (el cual sirve para los diferentes valores de δ), y el parámetro de regularización $\alpha_1(\delta) = 10^{-4}$ para determinar $\vec{P}_{\alpha_1(\delta)}$ de (14) a partir de los datos V_δ . En este caso $EA(a, a_\alpha) = 6.3075 \times 10^{-4}$ y $EA(P, P_{\alpha_1(\delta)}) = 1.2239 \times 10^{-1}$. Estos errores indican que los datos recuperados a_α y $\vec{P}_{\alpha_1(\delta)}$ por el método propuesto dan una buena aproximación a los datos exactos de a y \vec{P} .

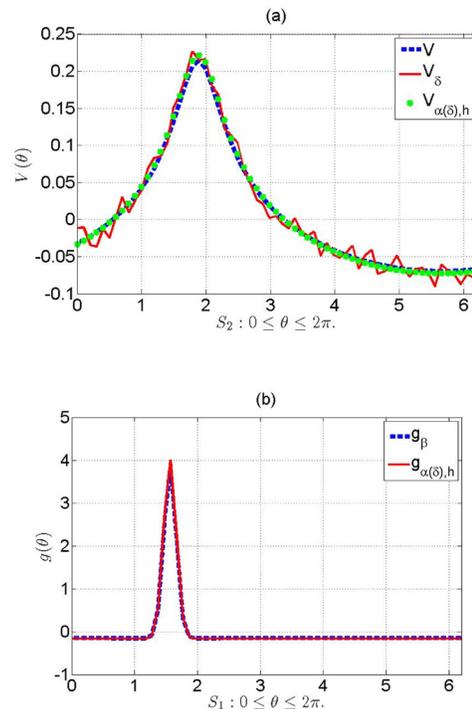


FIGURA 3. (a) Medición exacta V (línea punteada), perturbada (línea continua) y recuperada (asteriscos) a partir de la fuente. (b) Fuente exacta (línea punteada) y recuperada (línea continua) a partir del algoritmo.

Se muestran resultados similares en la Tabla 4 para $\delta = 0.1$ y diferentes valores del centro a y del momento dipolar \vec{P} para la fuente dipolar g_β con $\beta = 0.1$, usando la malla $M_1 (774,1470)$ cuyo tamaño de malla es $h = 0.1$. Además, se muestran los errores absoluto y relativo como en las Tablas anteriores. En la Tabla 4 se observan que los datos $a_{\alpha(\delta)}$ y $\vec{P}_{\alpha_1(\delta)}$ se recuperan de manera estable por el método propuesto.

TABLA 4. Resultados numéricos considerando diferentes centros y momentos dipolares con $\beta=0.1$, para $\delta=0.1$, usando la malla M_1 (774,1470) cuyo tamaño de malla es $h=0.1$.

| a | $(-1, 0)$ | $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ | $(1, 0)$ |
|---|-------------------------|--|-------------------------|
| P | $(1, 1)$ | $(\frac{1}{2}, 2)$ | $(2, 1)$ |
| $EA(V_\delta, V)$ | 1.1258×10^{-2} | 1.9521×10^{-2} | 2.3167×10^{-2} |
| $ER(V_\delta, V)$ | 1.6138×10^{-1} | 1.6067×10^{-1} | 1.4192×10^{-1} |
| $\alpha(\delta)$ | 10^{-4} | 10^{-4} | 10^{-4} |
| ε | 10^{-3} | 10^{-3} | 10^{-3} |
| n | 7 | 6 | 8 |
| $a_{\alpha(\delta)}$ | $(-1, 0.0013)$ | $(0.7073, 0.7069)$ | $(1, -0.0024)$ |
| $EA(a, a_{\alpha(\delta)})$ | 1.2615×10^{-3} | 3.1537×10^{-4} | 2.4343×10^{-3} |
| $ER(a, a_{\alpha(\delta)})$ | 0.0013 | 3.1537×10^{-4} | 0.0024 |
| $\alpha_1(\delta)$ | 10^{-4} | 10^{-4} | 10^{-4} |
| $\vec{P}_{\alpha_1(\delta)}$ | $(0.9885, 1.1042)$ | $(0.4240, 2.0615)$ | $(2.0065, 0.8816)$ |
| $EA(\vec{P}, \vec{P}_{\alpha_1(\delta)})$ | 1.0485×10^{-1} | 9.7728×10^{-2} | 1.1857×10^{-1} |
| $ER(\vec{P}, \vec{P}_{\alpha_1(\delta)})$ | 0.0707 | 0.0464 | 0.0541 |

Por lo tanto, se ha mostrado que el método propuesto recupera soluciones numéricas estables en el caso de datos con error V_δ , tal como se ilustra en la Figura 3.

En las ecuaciones (13) y (15), puede emplearse en vez de la medición V_δ , el potencial de la solución encontrada en la primera parte del algoritmo. Ya que el método es estable, se obtendrán resultados similares.

CONCLUSIONES

Los resultados numéricos mostraron que el algoritmo propuesto es convergente, estable, y que el parámetro de regularización de cada uno de los problemas en que se divide, puede elegirse igual (usando el método de la curva L), y el nivel de error es del orden del error de medición y, con ello, la factibilidad del algoritmo propuesto. Entre sus ventajas para identificar de manera estable fuentes de tipo dipolar, se hallan que el problema no lineal se dividió en dos problemas lineales (para los cuales se pudieron usar algunos resultados conocidos) y que puede extenderse a geometrías complejas y tridimensionales. Sin embargo, debe analizarse su posible aplicación a fuentes más generales.

En un trabajo futuro, se explorará la posibilidad de aplicar el algoritmo a otro tipo de fuentes que se expresen por medio de un conjunto finito de parámetros, las cuales pueden representar diferentes tipos de actividad eléctrica; otra posibilidad es el de usar otro tipo de expresión para aproximar a la función delta de Dirac la cual pueda dar ventajas numéricas.

REFERENCIAS

- [1] Nunez P. L. and Srivivasan R. Electric Fields of the Brain. The Neurophysics of EEG, 2da edition, New York, Oxford University Press, 2006. DOI: [10.1093/acprof:oso/9780195050387.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780195050387.001.0001)
- [2] Kirsch A. An Introduction to the mathematical theory of inverse problems. 2da edition, Vol. 120, Appl. Math. Sci., Springer, New York, 2011. DOI: [10.1007/978-1-4419-8474-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8474-6)
- [3] Morín M., Netzahualcoyotl C., Oliveros J., Conde J., and Juárez H. Stable identification of sources located on separation interfaces of two different homogeneous media. Vol. 20, Advances in Differential Equations and Control Processes, 2019. DOI: <http://dx.doi.org/10.17654/DE020010053>
- [4] Hansen P. C., Prost O' Leary D. The use of the L-Curve in the Regularization of Discrete Ill-Posed Problems, SIAM Journal on Scientific Computing, 1993,14(6),1487-1503. DOI:<https://doi.org/10.1137/0914086>.
- [5] Sarvas J. "Basic Mathematical and Electromagnetic Concepts of the Biomagnetic Inverse Problem". Phys. Med. Biol., 1987; 32(1): 11-22. DOI: [10.1088/0031-9155/32/1/004](https://doi.org/10.1088/0031-9155/32/1/004)
- [6] Brenner S. C. and Scott L. R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Third edition, Texts in Applied Mathematics, Vol. 15, Springer, New York, 2008. DOI: [10.1007/978-0-387-75934-0](https://doi.org/10.1007/978-0-387-75934-0)
- [7] Golub G. H. and Van Loan C. F. Matrix Computations, 3rd edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.
- [8] Nocedal J. and Wright S. J. Numerical Optimization, 2da edition, Springer, 2006. DOI: [10.1007/978-0-387-40065-5](https://doi.org/10.1007/978-0-387-40065-5)
- [9] Hào N. and Lesnic D. The Cauchy problem for Laplace's equation with the conjugate gradient method, J. Appl. Math. 65; 2000:199-217. DOI: <https://doi.org/10.1093/imamat/65.2.199>
- [10] Glowinski R., Lions J. L. and He J. W. Exact and approximate controllability for distributed parameter systems: A numerical approach. Cambridge University Press, New York, NY, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0962492900002543>
- [11] Oliveros J., Morín M., Aquino F., Fragueta A., Analysis of the Inverse Electroencephalographic Problem for Volumetric Dipolar Sources Using a Simplification, Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica, 35; 2014: 115-124
- [12] Plonsey R. Bioelectrical Phenomena. Mac Graw Hill, 1969.
- [13] Morín M. M., Oliveros J. J., Conde J. J., Fragueta A., Gutiérrez E. M., Flores E. Simplificación del problema inverso electroencefalográfico a una sola región homogénea con condición de Neumann nula. Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica. Vol. 34, No. 1; Abril 2013: 41-51.
- [14] Vladimirov V. S. Equations of Mathematical Physics. Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.